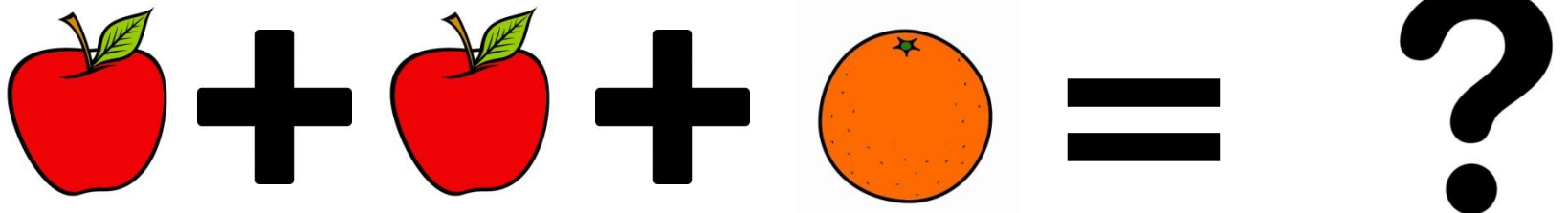


Séance 3: Résolution de problèmes arithmétiques



Objectifs du cours

Théorie Piagétienne

Vers 7 ans

- Le nombre prend naissance au moment des opérations concrètes.
- A cet âge l'enfant peut se représenter certains actes sans les accomplir, comme des transformations du type « ajouter » ou « enlever », comme on le fait dans les problèmes de maths par les opérations additions et soustractions

Les critiques adressées à Piaget

- Épreuves piagésiennes = épreuves abstraites et basées sur le langage
- Épreuves piagésiennes = épreuves conflictuelles, pièges, nécessitant l'inhibition
- Compétences numériques précoces (nativisme)
- Et des échecs tardifs également, voire très tardifs...

Constats dans l'enseignement des Maths!

L'enfant apprend à faire des opérations élémentaires en CP et CE1

L'enseignement et l'évaluation de la compréhension des notions mathématiques vont se faire sur la base d'opérations quotidiennes:

Jules a 10 billes avant la récréation. Pendant la récréation il en perd 3 en jouant contre ses camarades. Combien Jules a-t-il de billes au retour de la récréation?

$$10 - 3 = ?$$

Marie a 2 billes rouges et 3 billes jaunes dans son sac. Combien Marie a-t-elle de billes en tout dans son sac?

$$2 + 3 = ?$$

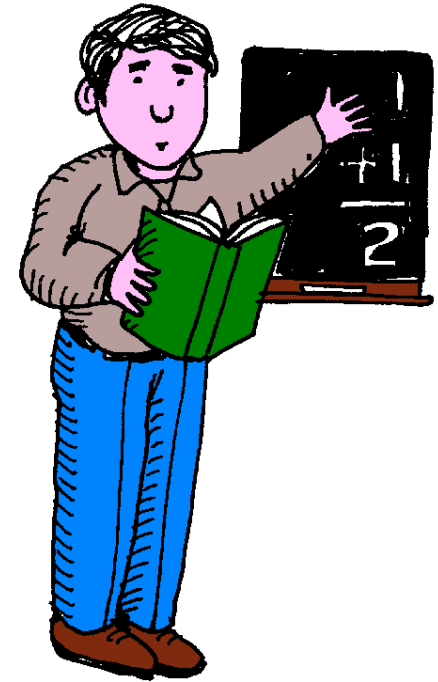


1. Aspects sémantiques des énoncés des problèmes

Exercice pratique:

$$5 - 3 = 2$$

A partir de l'opération ci-dessus, inventez un problème de soustraction qui se résout de cette manière.



Réponse: Presque tous proposent un problème avec une quantité initiale à laquelle on ôte quelque chose et la question porte sur ce qu'il reste (dans la plupart des cas : « combien reste-t-il »).

Pourquoi?

Cela reflète la connaissance naïve « soustraire, c'est retirer ». (la même que les enfants, et encore bien présente chez l'adulte...)

1. Aspects sémantiques des énoncés des problèmes

Exercice pratique:

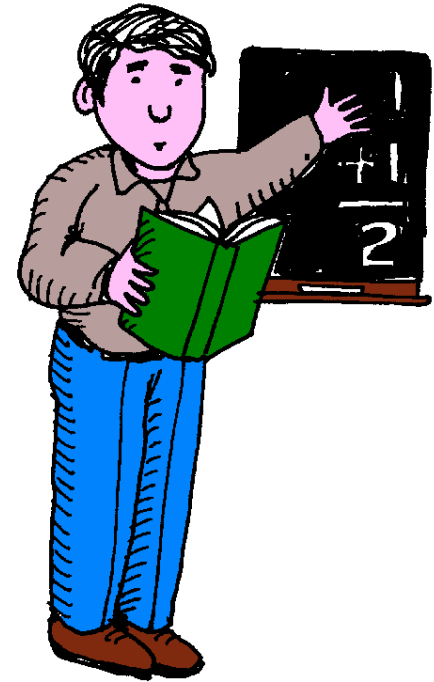
$$5 - 3 = 2$$

A partir de l'opération ci-dessus, inventez un problème de soustraction dans lequel il ne s'agit que de gain, rien n'est retiré.

Réponse: Paul a 3 billes avant la récréation. Il en gagne pendant la récréation. Au retour de la récréation, il en a 5. Combien en a-t-il gagnées ?

$$5 - 3 = 2$$

Presque tous proposent un problème avec une quantité initiale à laquelle on ôte quelque chose et la question porte sur ce qu'il reste (dans la plupart des cas : « combien reste-t-il »).



Il est beaucoup plus difficile de produire des énoncés qui ne correspondent pas aux connaissances naïves que nous avons (« soustraire, c'est retirer ») donc on pense plus facilement à des énoncés en termes de perte plutôt que de gain...

1. Aspects sémantiques des énoncés des problèmes

Que montre cet exemple?

Que signifie additionner ou soustraire?

Donnez une réponse en termes psychologiques, à quel type de système de résolution de pbm cela correspond-il?

Réponse: C'est utiliser un algorithme d'addition ou de soustraction, c-à-d une séquence d'étapes, d'opération pour atteindre la solution.

Dans cet exemple, peut-on anticiper qu'un problème est plus difficile qu'un autre? Pourquoi?

$5 + 4 = X$, que vaut X

$5 + Y = 9$, que vaut Y



Le premier cas est simple car il faut dénombrer le total d'objets présents dans l'énoncé, et la sémantique « + » de l'énoncé correspond à l'algorithme d'addition. Dans le second cas, il s'agit de trouver un complément pour passer de l'état initial « 5 » à l'état final « 9 », ce qui revient à faire une soustraction, tandis que la sémantique suggère « un ajout, un gain » plus fréquemment associé à l'algorithme d'addition.

1. Aspects sémantiques des énoncés des problèmes

Si on devait conclure:

Peut-on dire que la difficulté de résolution d'un problème dépend entièrement de la maîtrise de l'opération, de l'algorithme à utiliser?

Réponse: La difficulté de l'opération ne réside pas seulement dans la difficulté de résolution d'un problème. La manière dont l'énoncé est formulé peut en modifier radicalement la difficulté.

Pourquoi?

La sémantique employée va contribuer à activer nos connaissances naïves, des heuristiques du Système 1, qui viendront concurrencer le système 2 logique de résolution de pbms responsable du déploiement des algorithmes



2. Typologie et formulation des énoncés des problèmes

Hudson (1983): On a posé le pbm suivant à des enfants de 5 ans.

Il y a 5 oiseaux et 3 vers.

A/Combien y a-t-il de plus d'oiseaux que de vers ?

B/ Combien d'oiseaux n'auront pas de vers ?

Question: Quel énoncé amène au taux de réponse correct le plus élevé?

Réponse: A = 17% et B = 60%

Pourquoi?

Dans le cas de A, la formulation est piège car on utilise le mot « plus » alors qu'il ne s'agit pas d'une addition. La forme du problème correspond à une typologie « comparaison ».

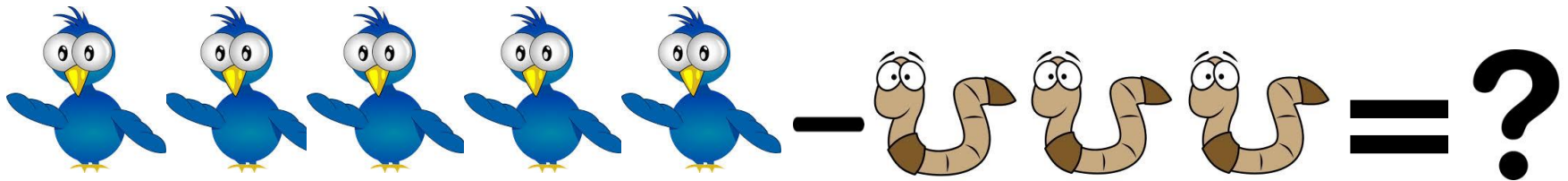
Dans le cas B, il s'agit d'une typologie « combinaison ». Cette dernière typologie est plus simple car plus concrète comme nous allons le voir.

2. Typologie et formulation des énoncés des problèmes

Hudson (1983): On a posé le pbm suivant à des enfants de 5 ans.

Il y a 5 oiseaux et 3 vers.

A/Combien y a-t-il de plus d'oiseaux que de vers ? comparaison



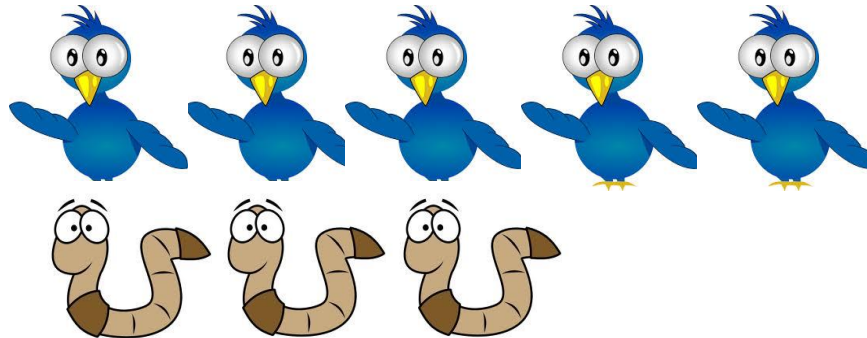
Dans le cas de A, la formulation de type comparaison est relativement peu représentatives des opérations quotidiennes: Mener des comparaisons entre individus de la même collection.

2. Typologie et formulation des énoncés des problèmes

Hudson (1983): On a posé le pbm suivant à des enfants de 5 ans.

Il y a 5 oiseaux et 3 vers.

B/ Combien d'oiseaux n'auront pas de vers ? combinaison



Dans le cas de B, la formulation de type combinaison est au contraire très représentative des opérations quotidiennes: Mettre en correspondance terme à terme deux catégories. Cela faciliterait la représentation mentale de la situation à l'aide d'une correspondance terme à terme et on se représente facilement le nombre d'oiseaux qui n'ont pas de vers = 2 (nous reviendrons sur cette notion de représentation mentale tout à l'heure).

2. Typologie et formulation des énoncés des problèmes

- Les problèmes statiques

- Problème de complément

Si deux quantités (ou +) combinées ensemble, quel total ?

Si info sur total et info sur un élément, trouver info sur l'autre élément constitutif du total

Ex.

J'ai 10 billes, des rouges et des bleues. J'ai 4 billes rouges. Combien ai-je de billes bleues ?

Paul a 4 billes rouges et 6 billes bleues. Combien a-t-il de billes au total ?

Paul a 6 peluches et 3 toupies. Combien a-t-il de jouets ?

2. Typologie et formulation des énoncés des problèmes

- Les problèmes statiques

- **Problème de comparaison : Comparer deux quantités entre elles. Combien y en a-t-il en + ou en - ?**

Ex.

Charlène a 10 billes. Marie a 15 billes. Combien Marie a-t-elle de billes de plus que Charlène ?

Charlène a 10 billes. Marie a 15 billes. Combien Charlène a-t-elle de billes de moins que Marie ?

Marie a 15 billes. Elle en a 5 de plus que Charlène. Combien Charlène a-t-elle de billes ?

Charlène a 10 billes. Elle en a 5 de moins que Marie. Combien Marie a-t-elle de billes ?

2. Typologie et formulation des énoncés des problèmes

- Les problèmes dynamiques

- **Problème de transformation/ changement. Combien après ou avant gain ou perte?**

- *Ex.*

- Emilie a 10 bonbons. Paul lui donne 3 bonbons. Combien Emilie a-t-elle de bonbons maintenant ?
- Emilie avait des bonbons. Paul lui en donne 3. Maintenant, Emilie a 13 bonbons. Combien Emilie avait-elle de bonbon au départ ?
- Emilie a 10 bonbons. Paul lui donne d'autres bonbons. Maintenant, Emilie a 13 bonbons. Combien de bonbons Paul lui a-t-il donnés ?
- Emilie a 10 euros. Elle dépense 3 euros à la boulangerie. Combien d'argent lui reste-t-il ?
- Emilie avait de l'argent. Elle dépense 3 euros à la boulangerie. Il reste 7 euros. Combien Emilie avaient-elle d'argent au départ ?
- Emilie a 10 euros. Elle dépense de l'argent à la boulangerie. Il lui reste 7 euros. Combien d'argent a-t-elle dépensé à la boulangerie ?

2. Typologie et formulation des énoncés des problèmes

- Les problèmes dynamiques

- Problème d'égalisation: que faut il ajouter / enlever pour avoir la même quantité

Ex.

Pierre a 5 billes. Paul a 12 billes. Combien faut-il donner de billes à Pierre pour qu'il en ait autant que Paul ?

Paul a 1 billes. Il faudrait donner 7 billes à Pierre pour qu'il en ait autant que Paul. Combien Pierre a-t-il de billes ?

2. Typologie et formulation des énoncés des problèmes

Tableau 6.1 - Types de problèmes et proportions de réussite en fonction du niveau scolaire (d'après Riley, Greeno et Heller, ibid.).

TYPES DE PROBLEME	TAUX DE REUSSITE			
	Mat.	CP	CE1	CE2
Changement				
1- X avait 3 billes. Puis Y lui a donné 5 billes. Combien de billes a maintenant X?	.87	1.00	1.00	1.00
2- X avait 8 billes. Puis il a donné 5 billes à Y. Combien de billes a maintenant X?	1.00	1.00	1.00	1.00
3- X avait 3 billes. Y lui en a donné. X a maintenant 8 billes. Combien de billes Y a-t-il donné à X?	.61	.56	1.00	1.00
4- X avait 8 billes. Il en a donné à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien a-t-il donné de billes à Y?	.91	.78	1.00	1.00
5- X avait des billes. Y lui en a donné 5 de plus. Maintenant X a 8 billes. Combien Y lui en a-t-il donné?	.09	.28	.80	.95
6- X avait des billes. Il en a donné 5 à Y. Maintenant X a 3 billes. Combien avait-il de billes?	.22	.39	.70	.80
Combinaison				
7- X a 3 billes. Y a 5 billes: Combien X et Y ont-ils de billes ensemble?	1.00	1.00	1.00	1.00
8- X et Y ont ensemble 8 billes. X a 3 billes. Combien Y a-t-il de billes?	.22	.39	.70	1.00
Comparaison				
9- X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien X a-t-il de billes de plus que Y?	.17	.28	.85	1.00
10- X a 8 billes. Y a 5 billes. Combien Y a-t-il de billes de moins que X?	.04	.22	.75	1.00
11- X a 3 billes: Y a 5 billes de plus que X. Combien de billes a Y?	.13	.17	.80	1.00
12- X a 8 billes. Y a 5 billes de moins. Combien de billes a Y?	.17	.28	.90	.95
13- X a 8 billes. Il a 5 billes de plus que Y. Combien de billes a Y?	.17	.11	.65	.75
14- X a 3 billes. Il a 5 billes de moins que Y. Combien de billes a Y?	.00	.06	.35	.75
Egalisation				
15- X a 3 billes. Y a 8 billes. Que doit faire X pour avoir autant de billes que Y?
16- X a 8 billes. Y a 3 billes: Que doit faire X pour avoir autant de billes que Y?

3. Aspects procéduraux des énoncés des problèmes

Brissiaud & Sander (2010)

- Il n'y a pas que les aspects sémantiques qui peuvent rendre un problème difficile, mais aussi les aspects **procéduraux**.

3. Aspects procéduraux des énoncés des problèmes

Classer ces énoncés par ordre de difficulté...

- 1/ Nicolas va en récréation avec 27 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ?
- 2/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 27 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ?
- 3/ Nicolas va en récréation avec 4 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ?
- 4/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 4 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ?

3. Aspects procéduraux des énoncés des problèmes

Classer ces énoncés par ordre de difficulté...

- 1/ Nicolas va en récréation avec 27 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ?
- 2/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 27 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ?
- 3/ Nicolas va en récréation avec 4 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ?
- 4/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 4 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ?

3. Aspects procéduraux des énoncés des problèmes

Classer ces énoncés par ordre de difficulté...

- 1/ Nicolas va en récréation avec 27 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ?
- 2/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 27 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ?
- 3/ Nicolas va en récréation avec 4 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ?
- 4/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 4 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ?

3. Aspects procéduraux des énoncés des problèmes

Brissiaud & Sander, 2010

- 1/ Nicolas va en récréation avec 27 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ? **(14 enfants réussissent sur 20)**
- 2/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 27 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ? **(8/20)**
- 3/ Nicolas va en récréation avec 4 billes. Pendant la récréation, il gagne des billes et maintenant il en a 31. Combien de billes Nicolas a-t-il gagnées ? **(8/20)**
- 4/ Nicolas va en récréation avec 31 billes. Pendant la récréation, il perd 4 billes. Combien de billes reste-t-il à Nicolas ? **(16/20)**

3. Aspects procéduraux des énoncés des problèmes

Brissiaud & Sander, 2010

- Les enfants mettent en place des stratégies informelles qui leur permettent de trouver une solution aux problèmes
- Ces stratégies de comptage sont efficaces avec des petits nombres
- Ces stratégies informelles sont basées sur la situation du problème



Paco veut acheter 3 stylos qui coûte chacun 50 pezeiros. Combien de pezeiros cela fait-il en tout?

1 stylo ça fait 50, 2 stylos ça fait $50+50=100$ et 3 stylos ça fait $100+50=150$.
150 pezeiros!



CE1: 34%
CE2: 62%

Ici la stratégie informelle de l'enfant fonctionne : Si problème

3. Aspects procéduraux des énoncés des problèmes

Brissiaud & Sander, 2010

- Les enfants mettent en place des stratégies informelles qui leur permettent de trouver une solution aux problèmes
- Ces stratégies de comptage sont efficaces avec des petits nombres
- Ces stratégies informelles sont basées sur la situation du problème



Paco veut acheter 50 stylos qui coûte chacun 3 pezeiros. Combien de pezeiros cela fait-il en tout?

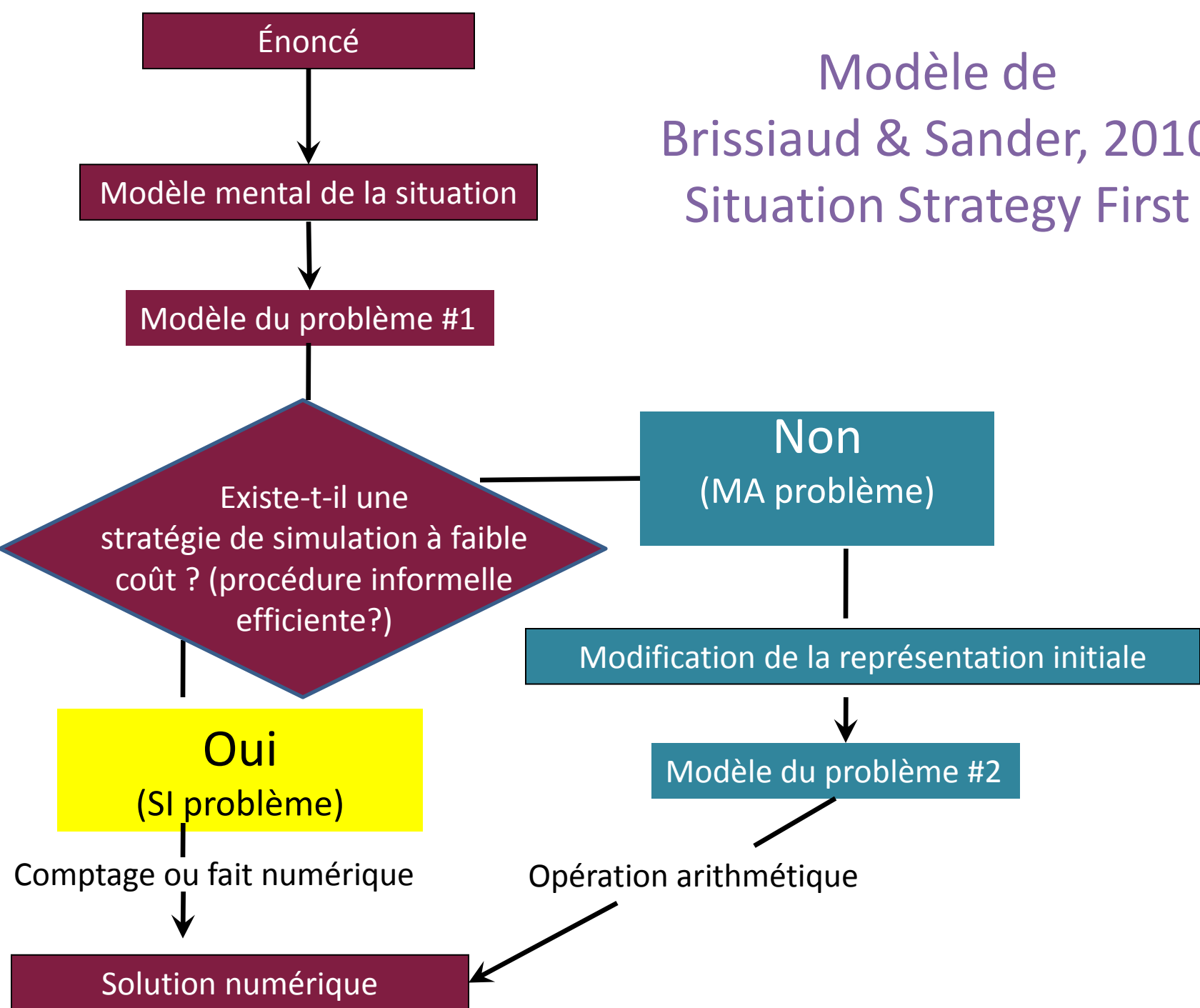
~~1 stylo ça fait 3, 2 stylos ça fait $3+3=6$; 3 stylos ça fait $6+3=9$~~



CE1: 0%
CE2: 32%

Ici la stratégie informelle de l'enfant ne fonctionne pas : MA problème

Modèle de Brissiaud & Sander, 2010 Situation Strategy First



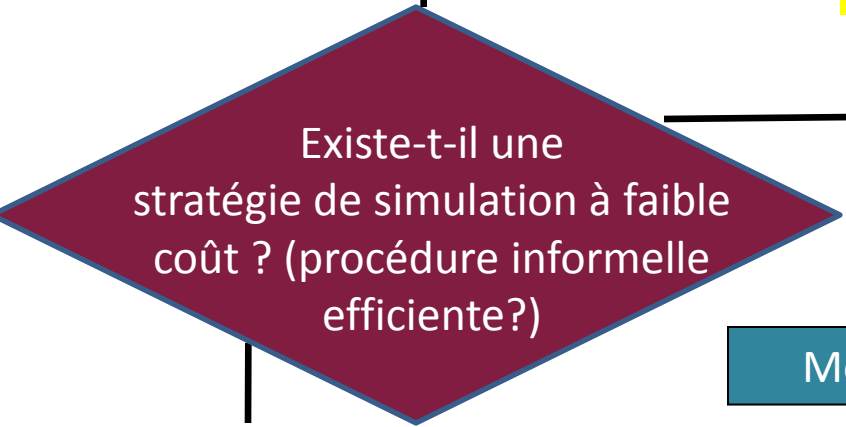
Énoncé

Modèle mental de la situation

Modèle du problème #1

Nicolas a 27 billes.
Il gagne d'autres billes
et il en a 31.
Combien de billes a-t-il
gagnées ?

S = 0,49



Non
(MA problème)

Modification de la représentation initiale

Modèle du problème #2

Octobre
CE 1

Comptage ou fait numérique

Opération arithmétique

Solution numérique

Problème 3 - Recherche d'un complément :

Nicolas a ~~27~~ 4 billes.
Il gagne d'autres billes
et il en a 31.
Combien de billes a-t-il
gagnées ?

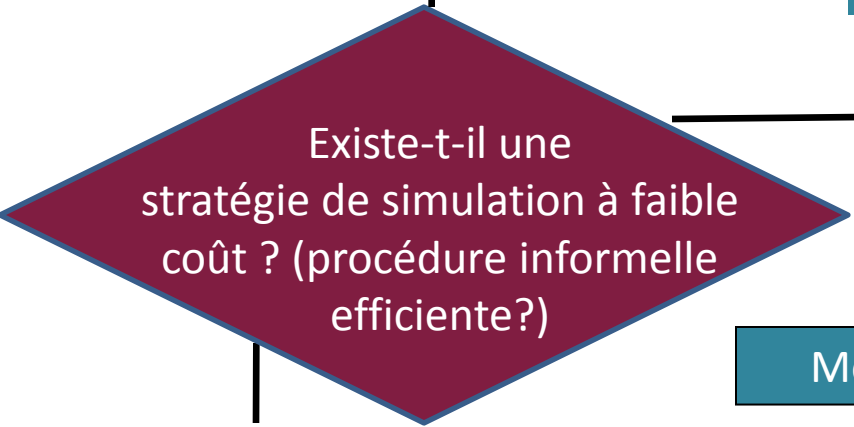
~~S = 0,49~~

S = 0,22

Énoncé

Modèle mental de la situation

Modèle du problème #1



Non
(MA problème)

Modification de la représentation initiale

Modèle du problème #2

Octobre
CE 1

Oui
(SI problème)

Comptage ou fait numérique

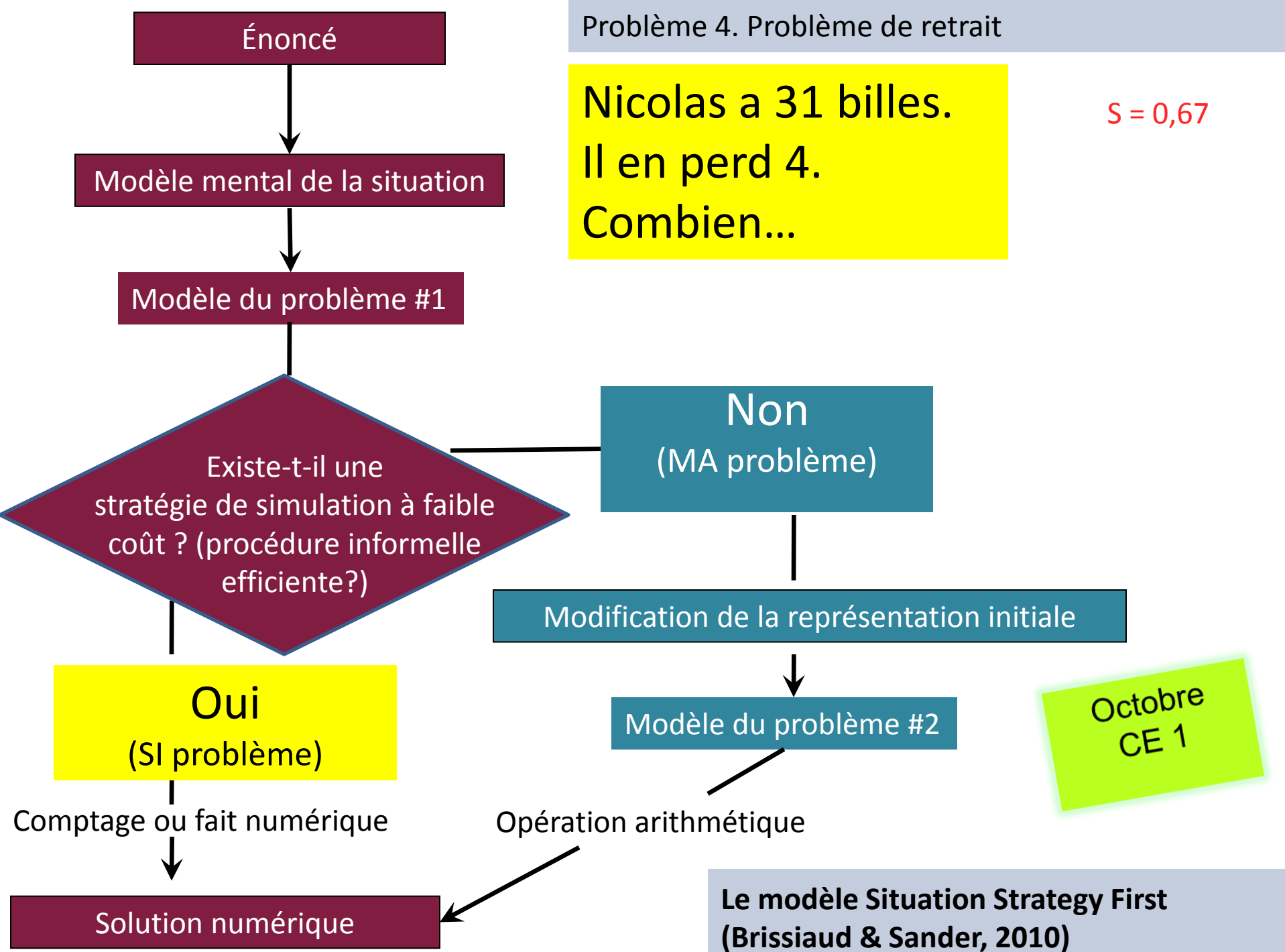
Opération arithmétique

Solution numérique

Le modèle Situation Strategy First
(Brissiaud & Sander, 2010)

Nicolas a 31 billes.
Il en perd 4.
Combien...

S = 0,67



Octobre
CE 1

Problème 2 : problème de retrait

Nicolas a 31 billes.
Il en perd ~~3~~ 27.
Combien...

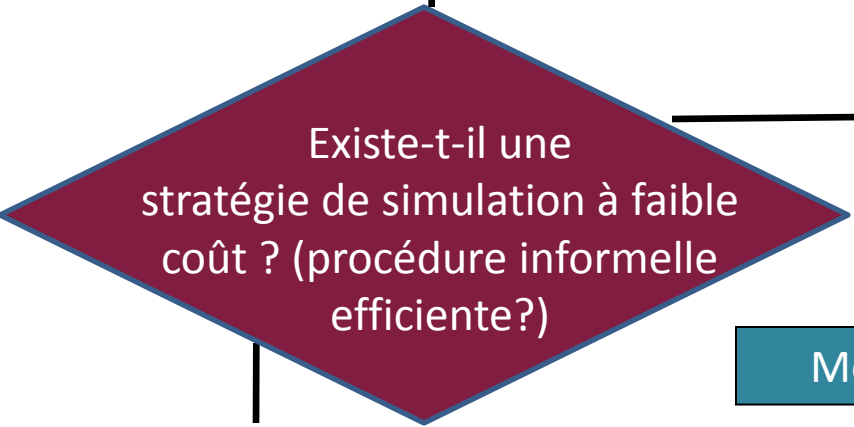
~~S = 0,67~~

S = 0,27

Énoncé

Modèle mental de la situation

Modèle du problème #1



Non
(MA problème)

Modification de la représentation initiale

Modèle du problème #2

Octobre
CE 1

Oui
(SI problème)

Comptage ou fait numérique

Opération arithmétique

Solution numérique

Le modèle Situation Strategy First
(Brissiaud & Sander, 2010)

4. Même les adultes sont concernés!

Imaginez un énoncé

→ Cf. Bassok et al (1998)

- 1) Dans lequel il est question de 12 oranges et 4 pommes
- 2) Dans lequel il est question de 15 oranges et 5 paniers

4. Même les adultes sont concernés!

Imaginez un énoncé

→ Cf. Bassok et al (1998)

- 1) Dans lequel il est question de 12 oranges et 4 pommes

Lorsque les objets sont de même niveau de catégories... 97% des problèmes à résoudre par addition... (Combien de fruits en tout?)

- 2) Dans lequel il est question de 15 oranges et 5 paniers

Lorsque les problèmes sont reliés fonctionnellement... 94 % des problèmes à résoudre par division... (Combien d'oranges dans chaque panier si répartition équitable?)

4. Même les adultes sont concernés!

Imaginez un énoncé

→ Cf. Bassok et al (1998)

- 1) Dans lequel il est question de 12 oranges et 4 pommes

Lorsque les objets sont de même niveau de catégories... 97% des problèmes à résoudre par addition... (Combien de fruits en tout?)

- 2) Dans lequel il est question de 15 oranges et 5 paniers

Lorsque les problèmes sont reliés fonctionnellement... 94 % des problèmes à résoudre par division... (Combien d'oranges dans chaque panier si répartition équitable?)

Conclusions

- Comme vous pouvez le constater, tout ce qui a été dit dans ce TD autour des performances des jeunes enfants aux tâches de laboratoire peut être généralisé à des tâches scolaires.
- **Les erreurs des enfants d'âge scolaire sont aujourd'hui interprétées différemment** : interférence liée au langage ou aux suppositions de l'enfant quant aux intentions de l'expérimentateur, ses connaissances sur le monde, difficultés à inhiber une heuristique automatique ...
- Ces nouvelles interprétations ont des implications directes en classe: autant pour l'enseignement que pour l'évaluation:
 - Comment enseigner ces algorithmes et tester leur compréhension.
 - Comment enseigner leur déploiement dans des situations pièges et tester la capacité de l'enfant à résister aux heuristiques pour utiliser les stratégies logiques.